

CONTINUITÉ



Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ et à valeur dans $[0,1]$ continue.

1. Montrer que f admet un point fixe (c.à.d. il existe c de $[0,1]$ tel que $f(c)=c$)
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \sqrt{\alpha}$
3. On suppose que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

Montrer qu'il existe $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(\beta + \frac{1}{2}\right) - f(\beta) = \frac{1}{2}$

Exercice2

Soit f une fonction de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$, continue et vérifiant $f(0)=f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0,2]$ tel que $f(c)=f(c+1)$
2. Soit g une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue et vérifiant : $g(0)=g(1)$.

Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $g(c) = g\left(c + \frac{1}{2}\right)$

Exercice3

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue et vérifiant $f(0) \neq f(1)$. Soient p et q deux nombres réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe c de $[0,1]$ tel que : $f(c) = \frac{pf(1)+qf(0)}{p+q}$

Exercice4

Soit g une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continue. Soient $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ des nombres réels de l'intervalle $[a,b]$.

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} g(x_k)}{n}$

Exercice5

Montrer que l'équation : $\sum_{k=1}^{k=n} \cos(kx) = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$

CONTINUITÉ



Exercice 6

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$

1. Supposons que : $\forall x \in [a, b], f(x) > g(x)$.

Montrer que : $(\exists m \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in [a, b]) f(x) \geq g(x) + m$

2. Supposons que : $\forall x \in [a, b], f(x) \neq g(x)$.

Montrer que : $\exists m \in \mathbb{R}_+^*, (\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x) + m) \text{ ou } (\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) - m)$

Exercice 7

Soient f une fonction continue sur un intervalle I .

Montrer que : si $\forall x \in I, f(x) \neq 0$ alors $(\forall x \in I, f(x) > 0)$ ou $(\forall x \in I, f(x) < 0)$

Fonctions continues et strictement monotones

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

1. Montrer que f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2. On désigne par f^{-1} la fonction réciproque f . Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

1. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

2. a) Montrer que f est continue sur $]0, \pi]$

b) Etudier la monotonie de f sur $]0, \pi]$

3. En déduire que f admet une fonction réciproque $f^{-1}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$

CONTINUITÉ



Exercice 8

I – On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

- 1) Déterminer D_f le domaine de définition de f et D_c le domaine de continuité de f
- 2) Montrer que f est strictement décroissante sur D_f
- 3) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera
- 4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

II – Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ on pose : $g(x) = f(\tan^2 x)$

- 1) a) Montrer que : $g(x) = \sqrt{\cos 2x}$
 b) Montrer que g est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle K que l'on déterminera
- 2) a) Calculer : $g^{-1}(0)$
 b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(x)}{x}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(1)}{x - 1}$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 + x + x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; 1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$
 b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 c) Montrer que f est continue en 0
- 2) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$
- 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$
 b) Montrer que : $\alpha = -\frac{1}{1 + \alpha^2}$
- 4) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f\left(\frac{1}{x-2}\right)$

CONTINUITÉ

**Exercice 10**

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+x+1}-x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) a) Montrer que : $\forall x \in]-\infty, 0[; \frac{x+1}{x} \leq f(x) \leq 1$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$

b) En déduire que : $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - \alpha}$